ラングトンのアリの周期と有界性

加藤 崇 (米子高専 電子制御工学科・5 年)
堀畑 佳宏 (米子高専 教養教育部門・数学) *

概要

ラングトンのアリ (Langton's ant) は 1986 年にアメリカの計算機工学者 Christopher Langton によって考案された正方格子上で動作するセル・オートマトンの一種である [3]. ラングトンのアリにおいて，アリは必ず規則的動作による「道 (highway)」を作り無限遠点に到達することが実験的に知られているが，証明には至っていない．本研究ではラングトンのアリに「n 回に 1 回ルールを無視して k 格子直進する」という条件を付加した条件付きラングトンのアリについて，実験によってわかった事実を述べる．またこの条件付きラングトンのアリにおいて，次の 2 つが証明できたため，その内容について記述する．

(1) k が奇数のとき，アリの経路は有界となる可能性を持つ．
(2) n が偶数のとき，道を形成する周期は必ず偶数となる．

1 導入

1.1 背景

ラングトンのアリは，平面上に無限に続く正方格子 $\mathbb{Z}^2$ と，格子上を移動するアリからなる．各格子の色は白か黒である．アリが移動を開始する前の各格子の色の状態を**初期配置**という．アリは以下 2 つのルールに従い格子上を移動する．

- アリが黒い格子にいた場合，アリは左に $90°$ 向き，マスの色を白に変えて 1 格子進む
- アリが白い格子にいた場合，アリは右に $90°$ 向き，マスの色を黒に変えて 1 格子進む

このラングトンのアリに対し，次の予想が良く知られている．

予想 1.1. 初期配置が有限個の格子を除いて同色であるならば，有限ステップ後に道を作る．

ここで「道」とは図 1 のようなアリの軌跡のことである．つまり「周期的動作によって形成される無限遠点へ伸びるアリの経路」のことである．正確な定義は次の節で述べる．

この予想は数学的には証明されていない．他方，計算機で実験する限りにおいて，予想の反例は見つかっていない．また実験的に分かっていることとして，初期配置が全て同色の場合，「道」に入るまでは規則性無く約 1 万ステップ動き，その後「道」を描くが，その周期（次節で定義）

* e-mail：horihata@yonago-k.ac,jp

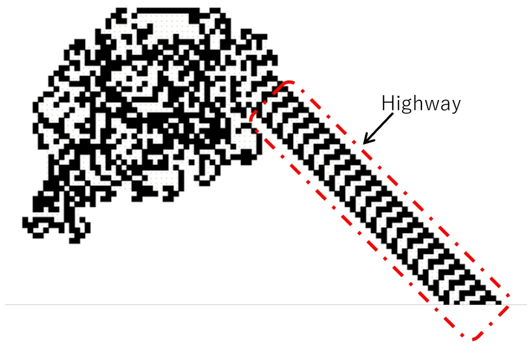


図 1: Highway

は 104 である．さらに初期配置を，予想の条件をみたす任意の配置とすると，道に至るまでのステップ数（次節で定義する「枝の長さ」）は変化する一方，道の周期は常に一定で 104 であることも知られている．道が延びていく方向も，右上，左上，右下，左下のいずれかである．

数学的に証明されているのは次の命題である．証明は 2.1 節で行う．

命題 1.2 (L. A. Bunimovich and S. E. Troubetzkoy, 1992 [1])**.** アリの軌跡の集合は有界ではない．

この命題の完結な証明は I. Stweart [5] にもある[*1]．ここでアリの軌跡が有界であるとは，有限個の格子からなる正方形からアリがはみ出ないことをいう．正確な定義は次節の最後に述べる．アリが道をもつならば，その経路は有界ではない．しかしこの逆は自明ではない．実際，（アリの移動ルールを変更しているが）最後の節で紹介する「螺旋状に拡大するアリの軌跡」は，有界ではないが道を持たない例となっている．従ってこの命題 1.2 からは道の存在が示せず，その証明にはまだまだ程遠いと思われる．この命題はアリの動きに関するマクロな情報を与えてくれるが，ミクロの情報を与えてくれない．道の存在証明には，アリの動きに関するより精度の高い特徴付けが必要である．

この通常のラングトンのアリの非有界性が知られている一方，P. Tokarz は 2018 年に，「n 回に 1 度ルールを無視して 1 格子直進する」を条件に加えたラングトンのアリを n-ant と定義し，その挙動について解析を行った [2]．その結果 Tokarz は n の値によって道の周期が様々に変化することを発見し，さらに経路が有界となる現象を発見した．また経路が有界となった場合，アリが各格子を通る回数に着目した考察を示した．

本研究では Tokarz の提案した n-ant を一般化し，「n 回に 1 度ルールを無視して k 格子直進する」という条件を追加したラングトンのアリに対し実験を行った．この条件付きラングトンのアリを (n, k)-ant と呼ぶことにする．

[*1] この論文では命題 1.2 は Cohen-Kong の定理と呼ばれているが，その原論分は見当たらない．

本研究では，(n,k)-ant における n, k の組み合わせを**動作条件**と呼ぶ．アリは最初，原点におかれ，上向きとする．実験条件は表 1 に示す通りである．

表 1: Experimental condition

Max operating steps	2×10^{12}
Size of square lattice	2048×2048
Range of n	2 - 30
Range of k	1 - 10
Initial state	256 patern

1.2　用語の定義

ここでは，ラングトンのアリに関する用語を定義していく，アリは最初，$(0,0)$ の格子（原点）に配置され，上向き（ベクトル $(0,1)$ の方向）とする．k ステップ後のアリの位置を格子の座標 $(A_k, B_k) \in \mathbb{Z}^2$ で表すことにする．ただし $(A_0, B_0) = (0,0)$ とする．命題 1.2 で用いた「アリの軌跡が**有界**である」とは，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $|A_k| \leq N$ かつ $|B_k| \leq N$ となるときをいう．つまり十分大きな正方形からアリがはみ出ないことを意味する．
「道」の定義のために，まず数列の周期について定義する．

定義 1.3. 数列 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が**周期数列**であるとは，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $k, \ell \in \mathbb{N}$ に対し $a_k = a_{k+\ell N}$ が成り立つことをいう．また，この条件をみたす最小の N をこの周期数列の**周期**という．

途中から周期的になる数列に対し，周期に入るまでの数列を枝と呼ぶ．定義は次である．

定義 1.4. 数列 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が**途中から周期的**であるとは，ある整数 $K \geq 0$，および周期 N の周期数列 $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $a_{K+k} = b_k$ が成り立つことをいう．N を，途中から周期的な数列 $\{a_k\}$ の**周期**という．この条件をみたす最小の K を K_0 とする．$K_0 \geq 1$ のとき，有限数列 $\{a_1, \cdots, a_{K_0}\}$ をこの数列の **枝** といい，K_0 をこの数列の**枝の長さ**という．なお $K_0 = 0$ の場合，数列 $\{a_k\}$ は単に周期数列となるので，「周期数列」は「途中から周期的な数列」に含まれる．

以上の準備から，ラングトンのアリにおける「道」を定義する．

定義 1.5 (道)**.** ラングトンのアリにおいて，アリの移動は上，左，下，右の 4 パターンである．それぞれ順に数 $1, 2, 3, 4$ を対応させ，アリの初期配置から k ステップめの移動に対応する数を δ_k とすると数列ができる．この数列をアリの **移動数列** と呼ぶ．与えられた初期配置に対し，移動数列 $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が次の条件をみたすとき，アリは**道を作る**という．

(1) 移動数列 $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は途中から周期的である．
(2) 移動数列の枝の長さが K, 周期が N のとき $(A_{K+1}, B_{K+1}) \neq (A_{K+1+N}, B_{K+1+N})$.

このとき，アリの周期的な軌跡の集合 $\{(A_{K+k}, B_{K+k}) \mid k \in \mathbb{N}\}$ を **道 (highway)** という．

つまり道とは，周期的動作（条件 (1)）によって形成される無限遠点へ伸びる（条件 (2)）アリの経路のことをいう．移動数列が上の条件 (1) をみたすが (2) をみたさないとき，つまり $(A_{K+1}, B_{K+1}) = (A_{K+1+N}, B_{K+1+N})$ となるとき，アリは**往来する**という．

また $k \in \mathbb{N}$ ステップ後のアリの**状態** $\mathcal{A}_k$ を，アリの位置と向き，白色の格子の集合 $\mathcal{W}_k \subseteq \mathbb{Z}^2$ の組 $((A_k, B_k), \delta_k, \mathcal{W}_k)$ で定める．ただし初期状態は $\mathcal{A}_0 = ((0,0), 1, \mathcal{W}_0)$ としておく．ただし $\mathcal{W}_0$ は初期配置における白色の格子の集合とする．

アリの「逆走」について次が成り立つ．アリの移動ルールから明らかである．

補題 1.6 (逆走補題)**.** ラングトンのアリが n ステップ動いた状態を $\mathcal{A}_n$ とする．ここで，アリの位置は変わらずに (A_n, B_n) とし，アリの向きを，格子 (A_n, B_n) の色が黒なら 90° 右回転，(A_n, B_n) の色が白なら 90° 左回転する．さらに格子 (A_n, B_n) の色を反転する．この状態からアリを動かすと（このことを，アリを**逆走**させるという），これまでたどってきた道を逆走し，初期位置 $(0,0)$ に戻る．ただし初期状態 $\mathcal{A}_0$ とは，向きが 90° ずれていて，$(0,0)$ の色も反転している．

往来に対し次が成り立つ．

命題 1.7. ラングトンのアリにおいて次が成り立つ．

(1) アリの軌跡が有界ならば，アリは往来する．
(2) アリが往来するならば枝は存在しない．つまり $K = 0$ となる．

Proof. (1) について．アリの軌跡が有界なら，アリの状態は有限通りしかない．実際，アリの向きは 4 通り，アリの位置と白の格子の配置は軌跡の有界性から有限通りしか存在しない．従ってある　$n \geq 0$ と $m > n$ が存在して，$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_m$ となる．従ってアリは往来する．

(2) について．アリが往来するとする．ここで枝を持つと仮定する．周期を N，枝の長さを $K > 0$ とする．往来することから，任意の $k, \ell \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{A}_{K+1+k} = \mathcal{A}_{K+1+\ell N+k}$ となる．ところが逆走補題（補題 1.6）より，十分大きな $n_0 \in \mathbb{N}$ ステップ目からアリを逆走させると最初から周期的であり，状態 $\mathcal{A}_k$ も周期的となる．従って途中から周期的な動作から外れることは無い．従って枝は存在しない． □

2　条件付きラングトンのアリの有界性

Tokarz は n-ant において，アリの経路が有界となるものを発見していた．本研究において検証したところ，この現象は $k = 1$ においてのみいくつかの n において確認できた．ラングトンの

アリではアリの経路が必ず非有界であることが証明されているが，条件付きラングトンのアリは経路が有界となりえる．

2.1 ラングトンのアリの非有界性

前節で述べた命題 1.2「（通常の）ラングトンのアリの非有界性」を証明する．ここではもう少し一般化した命題 2.2 を証明する．その前に言葉を用意する．

定義 2.1 (格子の集合の角)**.** 格子の集合 $I \subseteq \mathbb{Z}^2$ に対し, その要素 $(x,y) \in I$ が I の**角**であるとは, (x,y) の 4 つある隣のうち少なくとも, (x,y) を挟んで向かい合ってない 2 つが I に属していないときをいう．つまり, $\exists i \in \{1,-1\}\,(((x+i,y) \notin I \wedge (x,y+i) \notin I) \vee ((x+i,y) \notin I \wedge (x,y-i) \notin I))$ となるときをいう．

命題 2.2 (S. Troubetzkoy 1997 [4])**.** アリが無限回通過する格子の集合 $I \subset \mathbb{Z}^2$ は角をもたない．ここで $I = \{(A_k,B_k) \in \mathbb{Z}^2 \mid k \in \mathbb{N}, \forall \ell\, \exists \ell' > \ell\, (A_k,B_k) = (A_{\ell'},B_{\ell'})\}$.

注 2.3. 命題 2.2 から命題 1.2 は容易に導ける．実際，もしアリの軌跡の集合が有界だったとすると，アリが無限回通過する格子の集合 $I \subset \mathbb{Z}^2$ は空でない有限集合である．しかし格子の有限集合は必ず角をもつので，命題 2.2 と矛盾する．従ってアリの軌跡の集合は非有界である．

注 2.4. Troubetzkoy の論文 [4] はしばしば他の論文で引用されているが，原論分が見つけられなかったため，命題 2.2 の証明を以下で与える．

次に格子を区別する用語を定義しておく．ある格子が**縦横格子**であるとは，その格子に縦移動（上移動か下移動）で入り，その格子から横移動（左移動か右移動）で出ていくときをいう．**横縦格子**はこの逆である．一般にこの定義は well-defined とは限らないが，ラングトンのアリにおいてはこの定義が well-defined となる．このことを次の補題で証明する．またこの補題が命題 2.2 の証明に本質的である．

補題 2.5 (姿勢補題)**.** ラングトンのアリでは，初期配置およびステップ数に関わらず，各格子が縦横格子か横縦格子であるかがあらかじめ決まっている．

Proof. アリの移動ルールから，ステップごとにアリは横移動と縦移動を交互に繰り返す．従ってこの補題を示すには，ある格子からアリが出発し，再びその格子に戻ってくる場合，そのステップ数が必ず偶数であることを示せばよい．このことは，扱っている場が正方格子であること，また各ステップの移動が 1 格子であることから従う． □

横縦格子と縦横格子の配置は図 2 のように市松模様のようになっている．横縦格子を青色，縦横格子をオレンジ色としている．

次に命題 2.2 を証明する．

Proof. (命題 2.2 の証明) 背理法で証明するために，アリが無限回通過する格子の集合 I が角 $(x,y) \in I$ をもつと仮定する．一般性を失うことなく, (x,y) が「右上」の角, つまり $(x+1,y) \notin I$

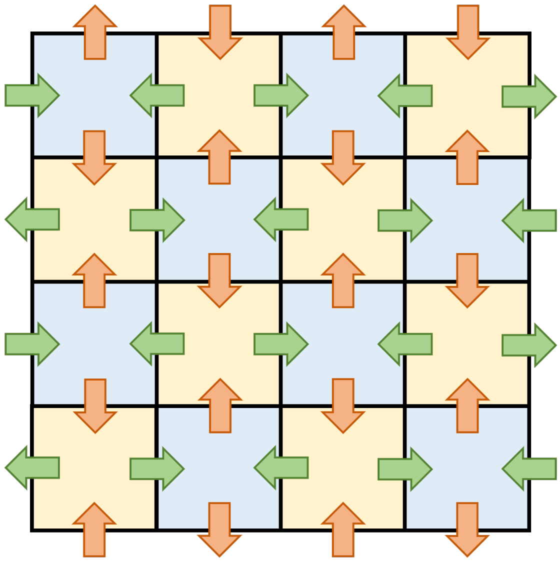


図 2: 横縦格子と縦横格子の市松模様

かつ $(x, y+1) \notin I$ と仮定してよい．姿勢補題 2.5 より (x, y) は横縦格子か縦横格子である．何れの場合も矛盾を導くことを示す．

(i) (x, y) は横縦格子，つまり横の格子から入ってきて，縦の格子に出ていく場合を考える．仮定 $(x+1, y) \notin I$ より，十分に大きなステップ以降に (x, y) に入ってくるのは全て左の格子 $(x-1, y)$ からとなる．そして毎回入るたびに格子 (x, y) の色は白黒が交互に入れ替わる．従って $(x, y) \in I$ であることから，格子 $(x, y+1)$ と $(x, y-1)$ を共に無限回通ることになる．特に $(x, y+1) \in I$ となるがこれは最初の仮定に矛盾する．

(ii) (x, y) が縦横格子の場合も同様に矛盾を導ける．

従って I は角をもたないことが証明された． □

2.2 条件付きラングトンのアリの有界性と周期

次に「n 回に 1 回ルールを無視して k 格子直進する」という条件付きラングトンのアリ (n, k)-ant について考える．アリの軌跡が非有界になるための証明で重要なことは，縦横格子か横縦格子の well-definedness を保証した姿勢補題 2.5 であった．ところが条件付きラングトンのアリでは，k が偶数の場合は姿勢補題が成り立つ一方，k が奇数の場合は姿勢補題が成り立たない．したがって k が奇数のとき，アリの軌跡が有界になる可能性がある．実際，初期配置で全ての格子が白の場合の $(*, *)$-ant ではアリの軌跡が有界になる．さらにこの場合，何ステップか後に初期配置に戻ることを繰り返す．つまり自分の動きを途中から遡るような周期的な動きをする．

なお現時点において実験により見つかった経路が有界となるのは $k = 1$ の場合のみである．

2 章で述べた格子の偶奇性を用いて, n が偶数のときの条件付きラングトンのアリの周期が必ず

偶数となることが証明できた．証明にあたり，以下の補題を利用する．

補題 2.6 (周期継続補題)**.** アリが周期を継続して道を形成するためには, 1 周期での侵入時の姿勢と終了時の姿勢が同一である必要がある.

補題 2.7 (条件付き周期補題)**.** 条件付きラングトンのアリにおいて, その周期は必ず n の倍数となる.

格子の偶奇性と同様の考え方から補題 2.6 を満たすためにはアリの方向変換の回数が偶数回でなければばならないことがわかる．ここで補題 2.7 から 1 周期の大きさ L を

$$L = sn \quad (s \in \mathbb{N})$$

と仮定する．このときアリの方向変換の回数 T は

$$T = sn - s = s(n-1)$$

となる．

ここで T が偶数, $n-1$ が奇数より, s は偶数となり, ここから周期 L は偶数となることが証明できる．

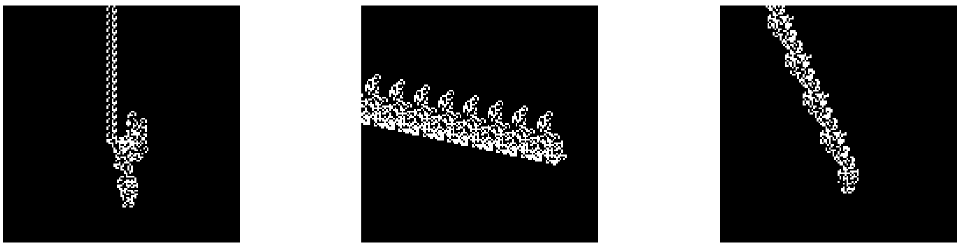
この結果は実験での周期の探索時間の短縮につながると期待される．

3　その他実験からわかった事実

条件付きラングトンのアリにおいて, 実験的にわかっていることを紹介する．

3.1　同一の動作条件下で複数種類の道が現れる

同一の動作条件において, 複数の初期配置からアリを動かしたところ, 異なる大きさの周期による道が現れた．図 3 にその一例として $n = 25$, $k = 3$ の場合の道を示す．ラングトンのアリにおいて道はすべて周期 104 であり, それ以外の周期からなる道は見つかっていない．条件付きラングトンでは, 実験によって同一の動作条件下で最大 3 種類の道が見つかっている．



(a) cycle length 50　**(b)** cycle length 975　**(c)** cycle length 1250

図 3: Each highway in $n = 25, k = 3$

3.2 アリの経路が螺旋状に拡大する

$n=4$, $k=5$ においてのみ現れた現象であり, アリは図 4 に示すような経路を示した. アリが以前描いた経路の外周を進み, 経路が螺旋状に拡大していく. これは, ラングトンのアリで扱ってきた道の概念とは大きく異なる周期的動作であると言える. この現象を判別する方法を検討しているが, 実際にアリの姿勢を並べた数列から機械的に求めることは, 計算量が膨大となることから不可能に近いと考えている.

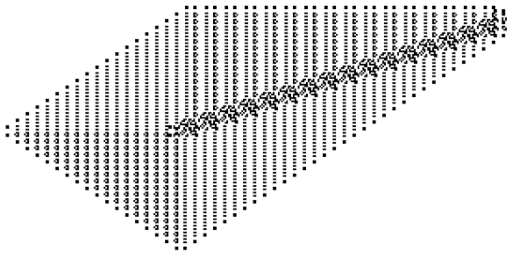


図 4: Phenomenon in $n=4, k=5$

4 結論

本研究では以下の成果を得た.

(1) 条件付きラングトンのアリにおいて, 有界な経路がありえることの理論的根拠を示すことができた.
(2) 条件付きラングトンのアリの周期について, 法則性の一部を証明することができた.
(3) 条件付きラングトンのアリにおいて, 同一の動作条件下で複数種類の道ができる現象を発見した.
(4) 条件付きラングトンのアリにおいて, 道とは異なる周期的動作による経路を発見した.

5 今後の課題

5.1 実験的事実の論理的裏付け

4 章で述べたアリの経路が螺旋状に拡大する事象についてはわかっていないことが多くある. ラングトンのアリに見られる道との関係性を中心に明らかにできればよい.

また, 複数種類の道が現れる動作条件については, 現れる周期の間の関係性や法則性を導くことを目指している.

5.2 コラッツ問題との関係

ラングトンのアリのように枝と周期を持つ問題としてコラッツ問題がある．コラッツ問題は以下のルールで進行し, 最終的に $4 \to 2 \to 1 \to 4$ という周期 3 の動作を繰り返すことが知られている．

$$C_0 \in \mathbb{N} \tag{5.1}$$

$$C_{n+1} = \begin{cases} C_n/2 & (C_n = 2m \quad m \in \mathbb{N}) \\ 3C_n + 1 & (C_n = 2m+1 \quad m \in \mathbb{N}) \end{cases} \tag{5.2}$$

ラングトンのアリとコラッツ問題では直近の履歴により次の動作が決定されることが共通している．このため, コラッツ問題の情報量を調整できれば, ラングトンのアリと同一視できる可能性があると考えている．

参考文献

[1] L. A. Bunimovich, S. E. Troubetzkoy, Recurrence properties of Lorentz lattice gas cellular automata, Journal of Statistical Physics, Vol 67, pp.289–302, 1992

[2] P. Tokarz, Dynamics of Langton's ant allowed to periodically go straight, arXiv:1807.08789, 2018, https://arxiv.org/pdf/1807.08789.pdf

[3] C. Langton, Studying Artificial Life with Cellular Automata, Physica D: Nonlinear Phenomena, 22, pp.120–149, 1986

[4] S. Troubetzkoy, Lewis–Parker Lecture 1997 The Ant, Alabama Journal of Mathematics, 21(2), 1997

[5] I. Stewart, The ultimate in anty-particles, Mathematical Recreations 271, 104107, 1994)