条件付きラングトンのアリと新しい「周期」の発見

○岡野 伊吹[*]・山本 莉輝[*]・堀畑 佳宏[**]
（米子高専総合工学科 2 年[*]・教養教育部門数学科[**]）

1. 背景

(1) ルール

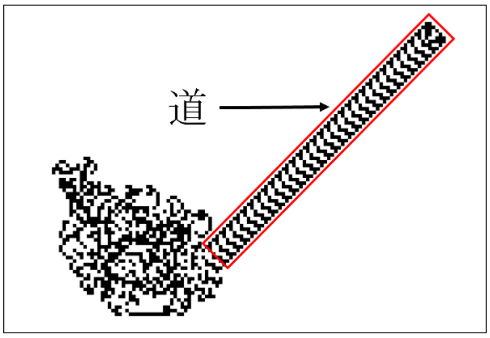
ラングトンのアリは，平面上に無限に続く正方格子と，格子上を移動するアリからなる．各格子の色は白か黒である．アリが移動を開始する前の各格子の色の状態を初期配置という．アリは以下の 2 つのルールに従い格子上を移動する．

・アリが黒い格子にいた場合，アリは左に 90° 向き，マスの色を白に変えて 1 格子進む

・アリが白い格子にいた場合，アリは右に 90° 向き，マスの色を黒に変えて 1 格子進む

(2) 知られている予想

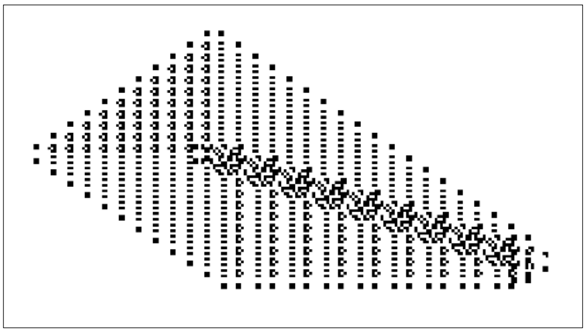
「初期配置が有限個の格子を除いて同色であるならば，有限ステップ後に道を作る」という予想がよく知られている．ここで「道」というのは図−1 のようなアリの軌跡のことである（周期が 104 のう同じ動きを繰り返す）．道は無限遠点へ伸びる．この予想は，実験的には様々な初期配置に対し成り立つことが確認されているが，数学的には証明されていない [1]．



図−1 「道」

2. 研究内容

本研究ではラングトンのアリに「n 回に 1 回ルールを無視して k 格子直進する」という条件を付加した条件付きラングトンのアリについて，特に $n = 4$, $k = 5$ においてできる，図−2 のような経路を示すものについて研究した． 以降この条件付きラングトンのアリを (4, 5)−ant と呼ぶことにする．



図−2 n ＝ 4，k ＝ 5 の条件付きラングトンのアリ

(4, 5)−ant は，まずアリが図−2 の中心部分のように不規則に動き，その後描いた経路の外周を進み，また不規則な動き（密になっている部分）をして以前描いた経路の外周を進むということを繰り返し，経路が螺旋状に拡大していく．（この動き方の発見は，数学同好会の先輩である加藤崇氏による [2]）．

この場合のアリの動き方は，通常のラングトンのアリにおける道の動きとは異なる．1(2) で見た道の場合は周期 104 の動きを繰り返す一方，(4, 5)−ant では軌跡が拡大していく．従って (4, 5)−ant での動きは周期的にはならないが，四角形が相似的に拡大していくことから，1 周期の長さが等差数列的に長くなっていくことが予想できる．

本研究ではアリの動きを数値化し数列を作り，この数列を分析することで予想が成り立つことを確認した．具体的な求め方は次節で述べる．

3. 研究方法

本研究では Python を使ってプログラミングを行い，アリの動きをシミュレートした．(4, 5)−ant の軌跡は 5 つの部分に分けられる．外周が作る四角形の「4 辺」と，右下に繰り返し延びる「密の部分」である．四角形の右上の辺を 1 辺目，左上の辺を 2 辺目，左下の辺を 3 辺目，右下の辺を 4 辺目として考えた．アリが 1 マス動く 4 方向をそれぞれ 0, 1，2，3 とし，1 歩動くごとに数値を記録して数列を作る（移動数列と名付ける)．移動数列を分析することで，各辺の周期を探すことができる．周期は，数列の中の周期的な動きの部分で最短なものを 1 周期とし，その周期が崩れた地点を境目に次の辺に移行していることが分かる．アリの動いた歩数を表示させるようにし，各境目の歩数と 1 周した時の歩数を記録し，中心の密の部分と各辺の長さ，またこれらを 1 周と見たときに周期がどれだけ長くなるかを調べた．

4. 研究結果

まず(4, 5)−ant の各辺においては同じ動きの繰り返し，つまり周期的に動いていることが予想される．実際，移動数列を分析することで各辺の周期について分かったことは，1 辺目，2 辺目，3 辺目は周期 8 の動きを， 4 辺目は周期 16 の動きをしている．各辺の周期の具体的な数値は表-1 に示す．4 辺目のみ 1 周期の歩数が 2 倍になっているのは，図−2 を見てわかる通り 4 辺目のみ 2 つの動きを交互に繰り返して進んでいるからだと考えられる．

表−1 各辺の周期

一つ目の辺の周期	二つ目の辺の周期	三つ目の辺の周期	四つ目の辺の周期	
0	0	3	2	0
0	3	3	1	3
3	2	0	0	2
2	2	3	0	2
1	1	2	3	1
1	0	2	2	0
2	1	1	3	3
1	1	0	3	3

また，密の部分の部分は拡大せずに同じ形が右下方向に再生産されていることから，周期的な動きをすることが予想された．実際に移動数列を調べることで，密の部分の周期は 154 だと分かった．

さらに四角形の 4 辺および密の部分で 1 周と考えると，1 周するごとにその歩数は 48 増えることが分かった．つまり，この条件付きラングトンのアリの動きの周期は，公差が 48 の等差数列になっていることが分かった．

5. まとめ

本研究では，(4, 5)−ant の新しい周期を見つけ，各辺や「密の部分」の長さを求めることができた．今後の課題として，Excel のマクロを使って自動で周期を見つけるプログラムを作ること，(4, 5)−ant 以外の周期的な動作をする条件付きラングトンのアリのパターンを見つけるということができたら良いと考えている．

研究をしてみて思ったことは，(4, 5)−ant は 1 周ごとに外周を進むように経路が拡大しているが，等差数列的に拡大しているので毎回 48 歩ずつしか拡大せず，意外と周期が大きくならないということだ．最初に動きを見たときは，等比数列的に拡大していると考えていたので驚いた．

6. 参考文献

1) C. Langton, *Studying Artificial Life with Cellular Automata*, Physica D: Nonlinear Phenomena, 22, pp.120–149, 1986
2) 加藤崇，堀畑佳宏，「ラングトンのアリの周期と有界性」，山陰・数学と基礎論研究集会 2024 報告集